

Informe Final de Laboratorio Avanzado
Caos en el Problema de los Tres Cuerpos

Francisco Javier Rodríguez Arias

10 de diciembre de 2004

Índice

1. Objetivo	2
2. Introducción	2
2.1. Problema de Sitnikov	2
3. Tratamiento teórico	3
3.1. Formalismo General del Problema de los Tres Cuerpos	3
3.1.1. Reducción del sistema	4
3.2. Formalismo del problema de Sitnikov	4
3.3. Indicadores de caos	6
3.3.1. Órbitas en el espacio de fase	6
3.3.2. Trayectorias en el espacio de configuraciones	6
3.3.3. Espectro de frecuencias	6
3.3.4. Función de autocorrelación	7
4. Simulación Numérica	8
4.1. Problema general de los Tres Cuerpos	8
4.2. Método de Euler	8
4.3. Método de Runge-Kutta	9
4.4. Problema de Sitnikov	9
5. Resultados	10
5.1. Problema general de los Tres Cuerpos	10
5.2. Problema de Sitnikov	11
5.2.1. Órbitas en el espacio de fase	11
5.2.2. Trayectorias en el espacio de configuraciones	11
5.2.3. Espectro de frecuencias	12
5.2.4. Función de autocorrelación	12
6. Conclusiones	17
7. Referencias	18

1. Objetivo

El objetivo de este trabajo es hacer una simulación de caos ambientada en el problema de los tres cuerpos que interaccionan gravitacionalmente, usando la ley de gravedad de Newton. Así podremos, en este caso específico calcular los parámetros de caos correspondientes.

2. Introducción

El problema de los Tres Cuerpos, es un problema clásico de la física newtoniana que puede ser definido de la siguiente forma:

Sean tres partículas que se atraen entre sí de acuerdo con la ley de gravedad de Newton, de tal forma que entre cada par de partículas hay una fuerza de atracción proporcional al producto de las masas de las partículas y a la inversa del cuadrado de su distancia de separación: están libres de moverse en el espacio y están inicialmente moviéndose de alguna manera dada; determinar el movimiento subsecuente.

Este problema involucra 18 grados de libertad, pues para cada partícula se tiene un vector (tres componentes) para su posición y otro para su momento.

2.1. Problema de Sitnikov

El problema de Sitnikov es un caso simple del problema de los Tres Cuerpos, en el cual dos de los cuerpos tienen igual masa y el tercero tiene una masa despreciable frente a éstos. Además se considerará el caso en el que ésta tercera masa tiene su movimiento en el eje perpendicular al plano definido por el movimiento de las otras dos, y que pasa por el centro de masa de éstos.

3. Tratamiento teórico

3.1. Formalismo General del Problema de los Tres Cuerpos

Se pueden plantear las ecuaciones diferenciales que describen a este sistema a partir de la definición de fuerza gravitatoria o del hamiltoniano que lo describe. Para definir el hamiltoniano correspondiente, consideremos tres cuerpos de masas m_1 , m_2 y m_3 cuyas distancias relativas son r_{23} , r_{31} y r_{12} . Sean las posiciones de las masas los vectores (q_1, q_2, q_3) , (q_4, q_5, q_6) y (q_7, q_8, q_9) . Entonces la energía cinética del sistema será:

$$T = \frac{1}{2}m_1 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2}m_2 (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) + \frac{1}{2}m_3 (\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2) \quad (1)$$

y considerando que la fuerza de atracción entre m_1 y m_2 es $Gm_1m_2r_{12}^{-2}$, donde G es la constante de gravitación universal, entonces el potencial que le corresponde es $-Gm_1m_2r_{12}^{-1}$. Así pues tendremos la siguiente energía potencial para el sistema:

$$V = -G\frac{m_2m_3}{r_{23}} - G\frac{m_3m_1}{r_{31}} - G\frac{m_1m_2}{r_{12}} \quad (2)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento del sistema serán:

$$m_k\ddot{q}_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \dots, 9) \quad (3)$$

donde k es la parte entera de $(r + 2)/3$. Este sistema tiene 9 ecuaciones de segundo orden, teniendo un orden total de 18.

Definiendo el momento como $p_r = m_k\dot{q}_r$ podemos escribir el hamiltoniano de la siguiente forma:

$$\mathcal{H} = \sum_{r=1}^9 \frac{p_r^2}{2m_k} + V \quad (4)$$

con lo que tendríamos las siguientes ecuaciones para describir al sistema:

$$\dot{q}_r = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r} \quad (5)$$

Como se puede apreciar, estas 18 ecuaciones diferenciales no forman un sistema muy sencillo de resolver algebraicamente, es más, no se pueden resolver en forma general para cualquier condición inicial, dándonos la posibilidad de tener un caso en el cual sea sensible el sistema a condiciones iniciales, lo cual significaría que constituyen un sistema caótico.

3.1.1. Reducción del sistema

Lagrange mostró que el sistema planteado (eq. 5) se puede reducir de orden 18 a orden 6, con las siguientes consideraciones.

Como no hay fuerzas externas, podemos decir que el momento total será una constante del movimiento, y además se van a mover su centro de masa en línea recta; este hecho se puede expresar con las siguientes 6 integrales del movimiento:

$$\begin{cases} p_1 + p_4 + p_7 = a_1 \\ p_2 + p_5 + p_8 = a_2 \\ p_3 + p_6 + p_9 = a_3 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} m_1 q_1 + m_2 q_4 + m_3 q_7 - (p_1 + p_4 + p_7) t = a_4 \\ m_1 q_2 + m_2 q_5 + m_3 q_8 - (p_2 + p_5 + p_8) t = a_5 \\ m_1 q_3 + m_2 q_6 + m_3 q_9 - (p_3 + p_6 + p_9) t = a_6 \end{cases} \quad (7)$$

donde a_1, a_2, \dots, a_6 son constantes. De esta forma, el orden del sistema se reduciría a 12. Del mismo modo se puede considerar el momento angular, puesto que no hay ningún torque externo, lo que nos daría las se puede expresar con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_4 p_5 - q_5 p_4 + q_7 p_8 - q_8 p_7 = a_7 \\ q_2 p_3 - q_3 p_2 + q_5 p_6 - q_6 p_5 + q_8 p_9 - q_9 p_8 = a_8 \\ q_3 p_1 - q_1 p_3 + q_6 p_4 - q_4 p_6 + q_9 p_7 - q_7 p_9 = a_9 \end{cases} \quad (8)$$

donde a_7, a_8, a_9 son constantes. Con estas integrales se reduciría el sistema a orden 9.

Luego, considerando que se tienen las posiciones respecto de un sistema de coordenadas fijos, el ángulo azimutal de uno de los cuerpos y la posición respecto al plano fijo pueden ser coordenadas ignorables, lo cual reduce el sistema a orden 8.

Si se considera ahora que la energía total se conserva, pues el hamiltoniano planteado es independiente del tiempo, se puede reducir con esa integral de la energía y eliminando el tiempo, se puede reducir a orden 6 el sistema planteado.

3.2. Formalismo del problema de Sitnikov

Como se había mencionado en la introducción (sec. 2.1), el problema de Sitnikov es una reducción del caso general. Para hacer más sencillo el cálculo numérico se considerarán unidades tales que $G = 1$, y $m = 1$. Considerando que las masas de los cuerpos dominantes sean $m_1 = m_2 = m/2$, tienen un movimiento elíptico en torno a su centro de masa, con excentricidad e , y período 2π . Entonces el movimiento de un tercer cuerpo situado en el eje perpendicular al plano de movimiento de las dos masas (plano xy) y que pase por el centro masa (por el origen), estará restringido sólo a ese eje (el eje z).

Si ponemos $r(t)$ como la distancia de las dominantes al centro de masa, y con las consideraciones anteriores, podemos definir el hamiltoniano que describe a la masa en el eje z en términos de unidades de masa de la siguiente forma:

$$H(z, v, t) = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2(t)}} \quad (9)$$

Del resultado de los dos cuerpos, se tiene que (considerando las unidades escogidas):

$$2r(\varphi) = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \varphi} = 1 - e \cos \varphi + O(e^2) \quad (10)$$

Y el ángulo polar φ se puede poner en función del tiempo t , vía la integral

$$t = \int_0^t \frac{4r^2(\varphi')}{\sqrt{1 - e^2}} d\varphi' \quad (11)$$

Entonces con las ecuaciones (10) y (11) y descartando términos de orden e^2 y mayores, obtenemos:

$$r(t) = \frac{1}{2}(1 - e \cos \varphi) + O(e^2) \quad (12)$$

así, el hamiltoniano (9) podrá escribirse a primer orden en e , como:

$$H(z, v, t) = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1/4}} - e \frac{\cos t}{4(z^2 + 1/4)^{3/2}} \quad (13)$$

Como se puede ver, este hamiltoniano depende del tiempo y tiene período 2π .

Las ecuaciones de movimiento para este hamiltoniano son:

$$\dot{z} = v \quad (14)$$

$$\dot{v} = -\frac{8z}{(4z^2 + 1)^{3/2}} - e \frac{24z}{(4z^2 + 1)^{5/2}} \cos t \quad (15)$$

Para $e = 0$ el sistema se vuelve independiente del tiempo y por lo tanto es integrable, pero para $e > 0$ la dependencia explícita del tiempo hace que no rompa la simetría temporal y no habrán cantidades integrables convirtiendo al problema en no integrable.

3.3. Indicadores de caos

Para poder decir que un sistema se comporta de manera caótico hay ciertos indicadores que deben medirse. Estos indicadores se medirán en simulaciones numéricas de las ecuaciones planteadas.

3.3.1. Órbitas en el espacio de fase

Las órbitas en el espacio de fase de un sistema caótico respecto a uno no caótico son muy diferentes, puesto que en un caso que no hay caos se pueden identificar órbitas cerradas definidas para un movimiento periódico.

3.3.2. Trayectorias en el espacio de configuraciones

La gráfica de la trayectoria seguida por el cuerpo en función del tiempo, nos puede dar una muy buena idea para identificar el tipo de movimiento que sigue, es decir, si es caótico o no. Pero esto es solo para visualizar qué está ocurriendo de una forma aproximada, puesto que los indicadores numéricos son los que dirán si realmente hay caos o no.

3.3.3. Espectro de frecuencias

De todas formas, podría ser que una trayectoria aparentemente caótica sea en realidad una combinación de muchas frecuencias definidas, y que a largo plazo repita su movimiento. La herramienta más adecuada en este caso es calcular espectro vía una transformada discreta de Fourier.

Considerando que $z_j = z(j\Delta t)$ (con $j = 1, \dots, n$), dado que $t_{\max} = n\Delta t$; usaremos la siguiente forma de la transformada de Fourier discreta,

$$\tilde{z}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n z_j e^{-2\pi i k j / n} \quad (16)$$

que es una discretización de una función de la frecuencia, $\tilde{z}_k = \tilde{z}(k\Delta f)$, con $\Delta f = 2\pi/t_{\max}$.

Entonces, se puede calcular

$$E_k = |\tilde{z}_k|^2 \quad (17)$$

que será una función de la frecuencia que significa la potencia con la que está presente esa frecuencia en la señal, y por eso picos serán las frecuencias presentes en la señal de z_j .

3.3.4. Función de autocorrelación

La función de autocorrelación nos ayuda a ver cómo se pierde la información en la trayectoria. Sea $\langle z \rangle = \Sigma_1^n z_k/n$ y $z'_i = z_i - \langle z \rangle$, entonces se define la autocorrelación como:

$$C(m\Delta t) \equiv C_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \quad (18)$$

Si una señal cambia poco después de un intervalo $m\Delta t$, los sumandos se refuerzan y sale un valor significativo de C_m . En cambio, si es una señal errática, los sumandos se cancelarán eventualmente haciendo que C_m tenga valores pequeños y además tienda a 0. En caso sea una señal periódica, C_m también podrá serlo.

4. Simulación Numérica

4.1. Problema general de los Tres Cuerpos

La simulación del problema de los tres cuerpos se hizo calculando en forma numérica las ecuaciones de movimiento para las posiciones y velocidades. En general el sistema de ecuaciones que había que resolver es el planteado en (3), que puesto en forma vectorial, y con ecuaciones de primer orden sería:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_1 \\ \dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_2 \\ \dot{\vec{r}}_3 = \vec{v}_3 \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{v}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \\ \dot{\vec{v}}_2 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \\ \dot{\vec{v}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \end{cases} \quad (20)$$

El método numérico para realizar la simulación fue inicialmente el método de Euler, que se explicará en la siguiente sección.

Pero el método de Euler no es suficiente, así que luego se usó el método de Runge-Kutta (sec. 4.3).

4.2. Método de Euler

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, el método de Euler es la primera aproximación de solución. Consideremos un sistema de N variables y_i , que dependen de t . Las ecuaciones diferenciales podrán expresarse de la siguiente forma:

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_N, t) \quad i = 1, \dots, N \quad (21)$$

Escogiendo un paso de t pequeño (Δt) se puede usar la aproximación de Euler, con la cual, para calcular los valores de y_i en el tiempo $t + \Delta t$ se necesitan conocer en el tiempo t . La fórmula sería:

$$y_i(t + \Delta t) = y_i(t) + \Delta t f_i(y_1, y_2, \dots, y_N, t) \quad i = 1, \dots, N \quad (22)$$

Entonces para averiguar los valores de y_i a cualquier t basta conocer sus valores iniciales (condiciones iniciales a $t = 0$) y resolviendo iterativamente con un paso Δt hasta llegar a ese valor de t .

4.3. Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta es un refinamiento del método de Euler. Usa para cada paso, varios pasos intermedios que ayudan a disminuir el error. El método que veremos será el de cuarto orden, que fue el que se usó para los cálculos.

En este caso consideraremos un sistema de una ecuación diferencial, para N ecuaciones, simplemente se aplica a cada una lo mismo, y se considera en el argumento de la función diferencial, a todas ellas.

Sea la ecuación diferencial

$$\dot{y} = f(y(t), t) \quad (23)$$

Considerando igualmente un paso Δt se podrá hacer el cálculo del valor de $y(t + \Delta t)$ con los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(y(t), t) \\ k_2 &= \Delta t f\left(y(t) + \frac{k_1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_3 &= \Delta t f\left(y(t) + \frac{k_2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_4 &= \Delta t f(y(t) + k_3, t + \Delta t) \\ y(t + \Delta t) &= y(t) + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(\Delta t^5) \end{aligned} \quad (24)$$

De esta forma se obtiene un valor con una mejor aproximación, de tal forma que el error acumulado con las sucesivas iteraciones para calcular el valor de la función a lo largo del tiempo disminuye respecto al método de Euler.

Además se puede hacer que controle el tamaño del paso calculando el error en cada paso, y exigiendo que no se exceda ese error, se puede aumentar o disminuir ese paso, haciendo de Runge-Kutta, un método muy eficiente para la resolución de ecuaciones diferenciales.

4.4. Problema de Sitnikov

En el problema de Sitnikov sólo se tiene un sistema unidimensional, que nos da un sistema de ecuaciones diferenciales, de segundo orden, que corresponde a las ecuaciones (14) y (15). Así pues, se procedió resolver el sistema con el método de Runge-Kutta de orden 4. Luego se procedió a calcular los indicadores de caos explicados en la sección 3.3.

5. Resultados

5.1. Problema general de los Tres Cuerpos

Es muy difícil identificar un parámetro cuya variación nos pueda dar regímenes caóticos en el problema general de los tres cuerpos, puesto que tenemos muchos grados de libertad y otras tantas constantes del movimiento. Entonces la simulación general fue de carácter demostrativo, para poder visualizar cómo se comportaba en general el sistema con diferentes juegos de condiciones iniciales.

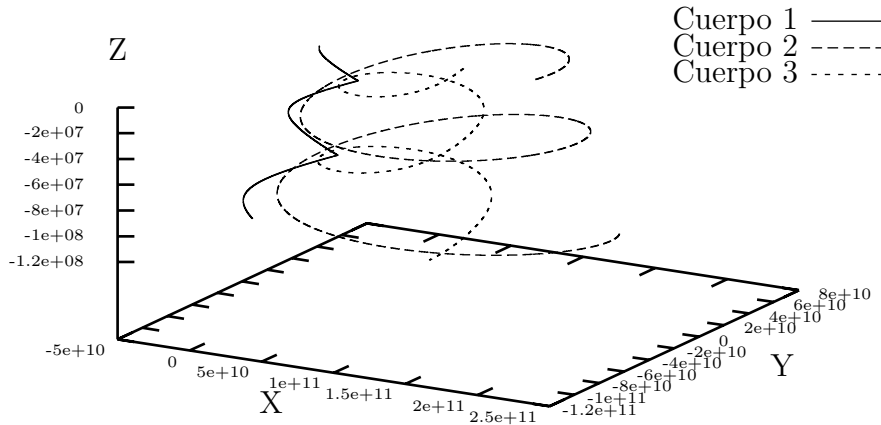


Figura 1: Trayectoria con condiciones iniciales arbitrarias (distancias en m).

Para la figura 1, se usaron los siguientes parámetros y condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \times 10^{30} \text{kg} \\ \vec{r}_1 &= (-1,36364 \times 10^{10}; 1,99714; 0) \text{m} \\ \vec{v}_1 &= (0; -2729,45; -4,53377) \text{m/s} \\ m_2 &= 1 \times 10^{29} \text{kg} \\ \vec{r}_2 &= (1,36364 \times 10^{10}; 1,99714; 0) \text{m} \\ \vec{v}_2 &= (0; 27270,5; -4,53377) \text{m/s} \\ m_3 &= 1 \times 10^{20} \text{kg} \\ \vec{r}_3 &= (8,63636 \times 10^{10}; 1,99714; 0) \text{m} \\ \vec{v}_3 &= (0; -12729,5; -4,53377) \text{m/s} \end{aligned}$$

5.2. Problema de Sitnikov

En el problema de Sitnikov se tiene como único parámetro la excentricidad e , dos valores para las condiciones iniciales. Como se aprecia en las ecuaciones (14) y (15), sólo en caso de $e \neq 0$ hay la posibilidad de encontrar caos, pues para $e = 0$ deja de depender del tiempo, volviéndose integrable.

Entonces, teniendo en consideración que para $e = 0$ tenemos un caso no caótico, se compararán los resultados para diferentes condiciones iniciales y $e > 0$ con casos en los que se tengan las mismas condiciones, pero $e = 0$.

5.2.1. Órbitas en el espacio de fase

Como se vió en la sección 3.3.1, las órbitas en el espacio de fase son muy importantes, aquí se presentan para el caso de $e = 0,002$, que siendo mayor pero cercano a 0, se puede notar, presenta órbitas estables (figura 2), en cambio, para $e = 0,07$ se tienen órbitas que no se cierran (figura 3). En todos los casos se tuvo como condición inicial para z el origen.

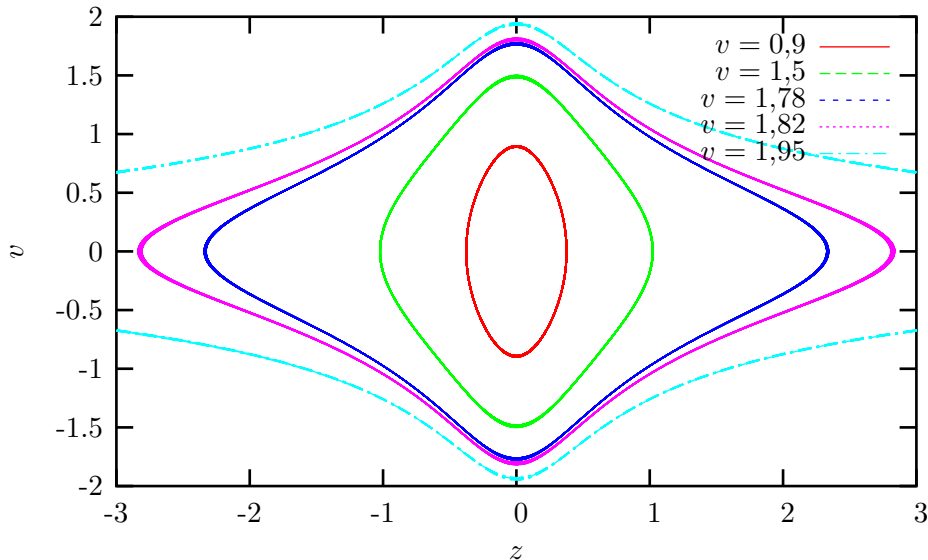


Figura 2: Órbitas en el espacio de fase, $e = 0,002$

Como se puede ver en la figura 3 no para todos los casos de $e = 0,07$ se tienen trayectorias en el espacio de fase no cerradas, puesto que para los valores bajos de v , no se consigue al parecer un régimen caótico.

5.2.2. Trayectorias en el espacio de configuraciones

En la sección 3.3.2 se vió que las trayectorias nos pueden ayudar a visualizar el movimiento y tratar de discriminar visualmente los casos en los que hay y

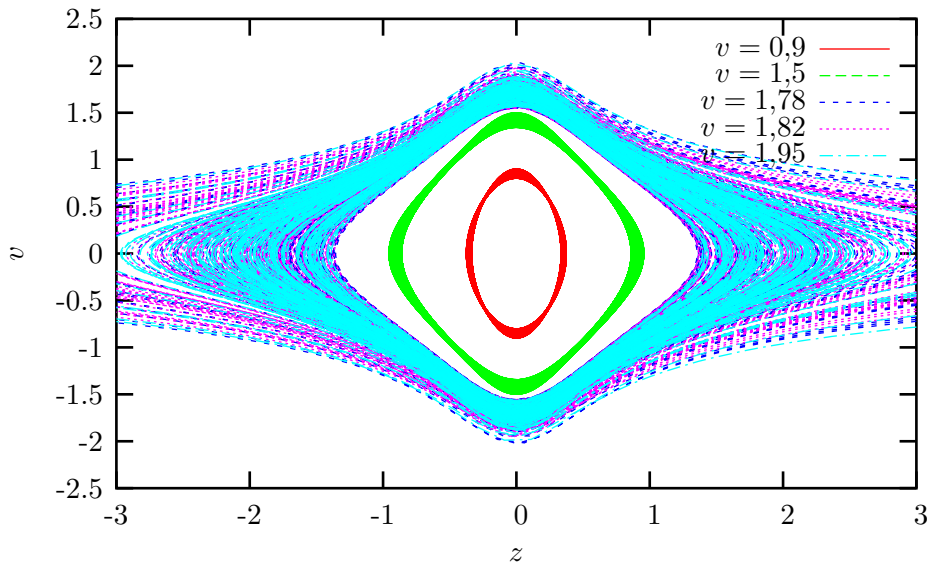


Figura 3: Órbitas en el espacio de fase, $e = 0,07$

no caos. Se presentan las trayectorias para el caso de $v = 1,82$. En la figura 4 podemos ver claramente la periodicidad del movimiento. En cambio en las figuras 5 y 6 se aprecia cómo no se puede extraer ningún tipo de periodicidad.

5.2.3. Espectro de frecuencias

Como se vió en la sección 3.3.3 el espectro de Fourier nos da un indicador que nos dice si hay o no periodicidad en el movimiento, cosa muy importante para identificar el caos. Entonces, presentaremos algunos espectros, para diferentes valores de e . Tanto para $e = 0$ (figura 7) podemos ver claros picos (son varios puesto que no es un movimiento armónico simple) que nos indican la presencia de frecuencias en el movimiento. En cambio para $e = 0,06$ (figura 8) y $e = 0,07$ (figura 9) con diferentes condiciones iniciales, se ve “ruido”, lo que nos indica que no hay ningún tipo de periodicidad.

5.2.4. Función de autocorrelación

En la sección 3.3.4 se vió que la función de autocorrelación definida por la ecuación (18), es otra forma de ver si los cambios en una señal en general son erráticos o no. Calculada la autocorrelación para diferentes valores de e , podemos ver que en el caso de $e = 0$ (figura 10) se cumple lo predicho en la sección 3.3.4, que siendo periódico, la autocorrelación lo sería también. En cambio, se puede ver cómo la función de autocorrelación tiende a disminuir conforme aumenta el tiempo en el caso de $e = 0,07$ (figura 11).

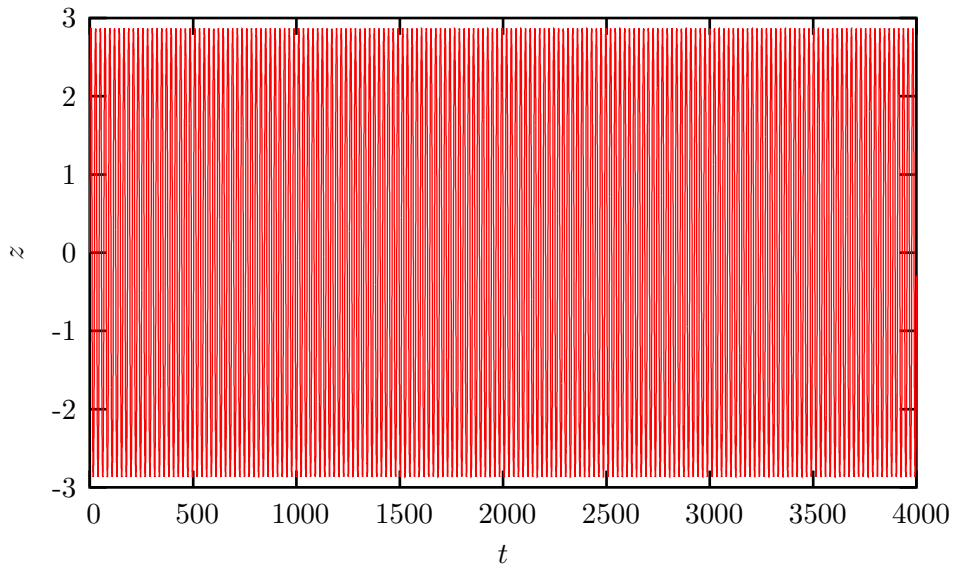


Figura 4: Trayectoria para $e = 0$

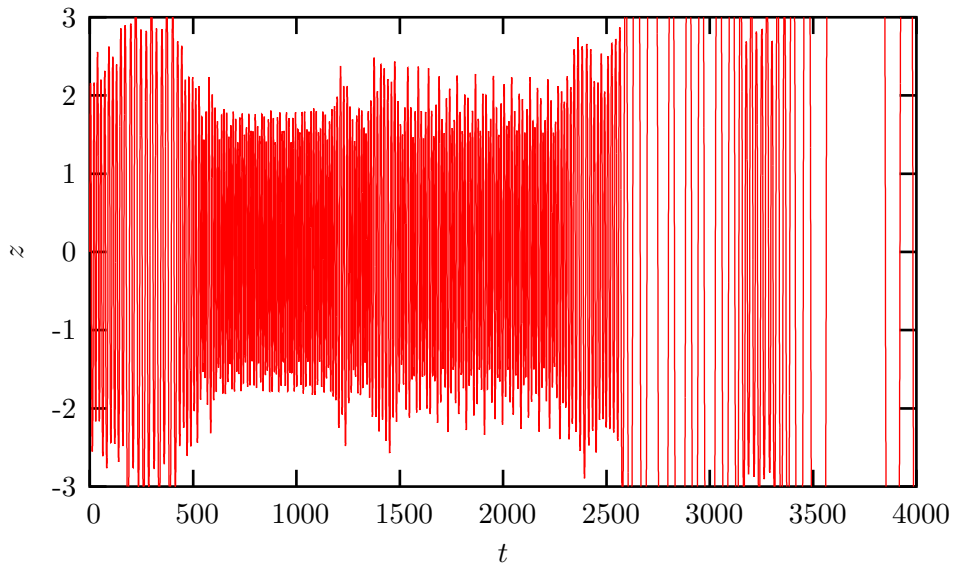


Figura 5: Trayectoria para $e = 0,06$

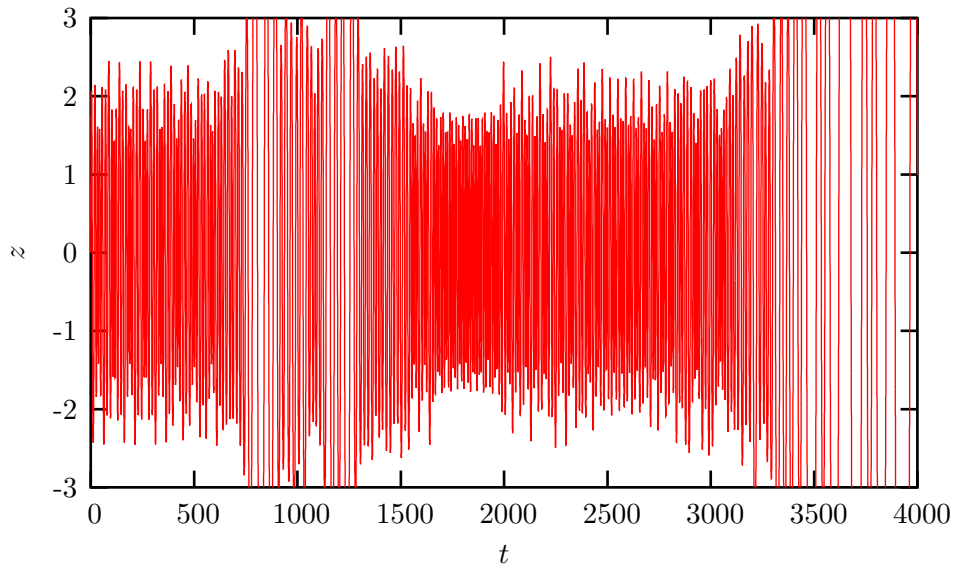


Figura 6: Trayectoria para $e = 0,07$

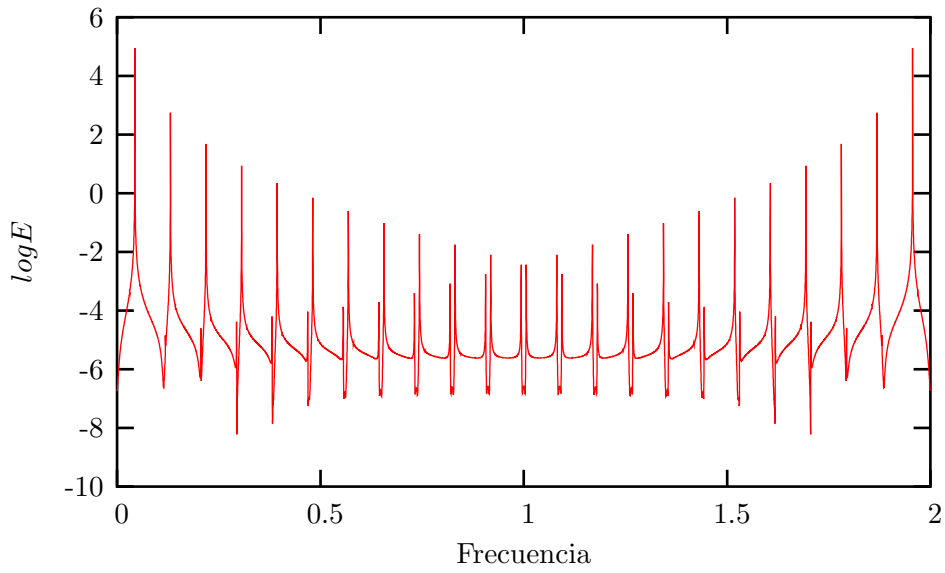


Figura 7: Espectro para $e = 0$

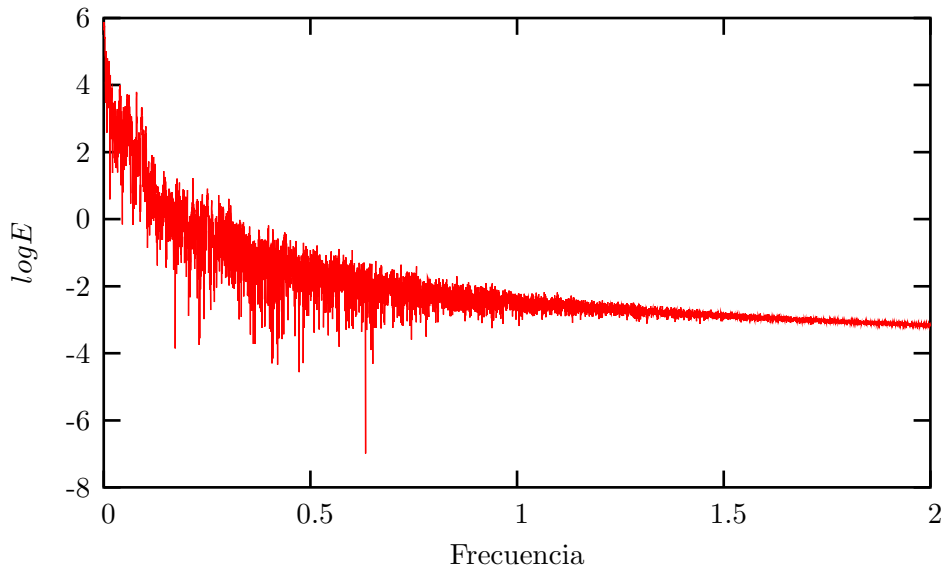


Figura 8: Espectro para $e = 0,06$

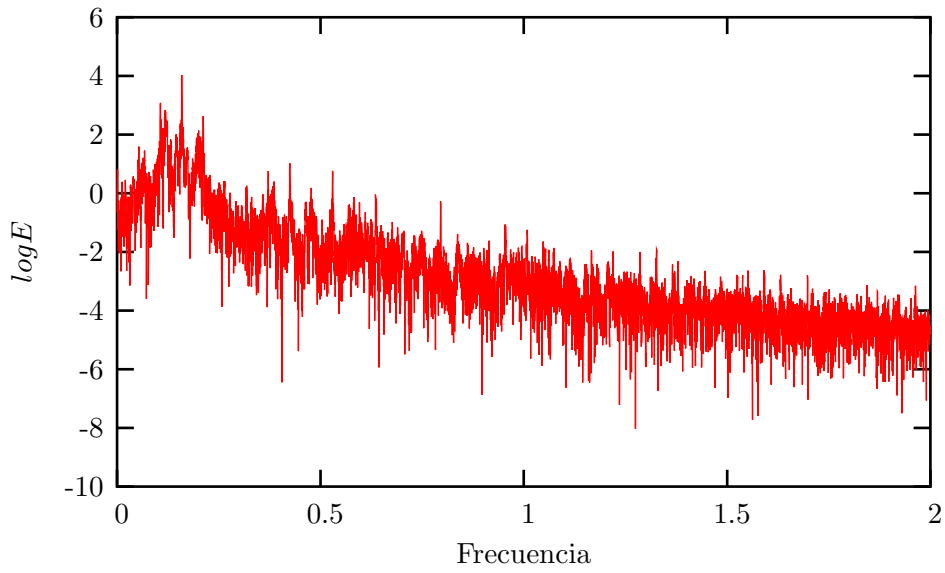


Figura 9: Espectro para $e = 0,07$

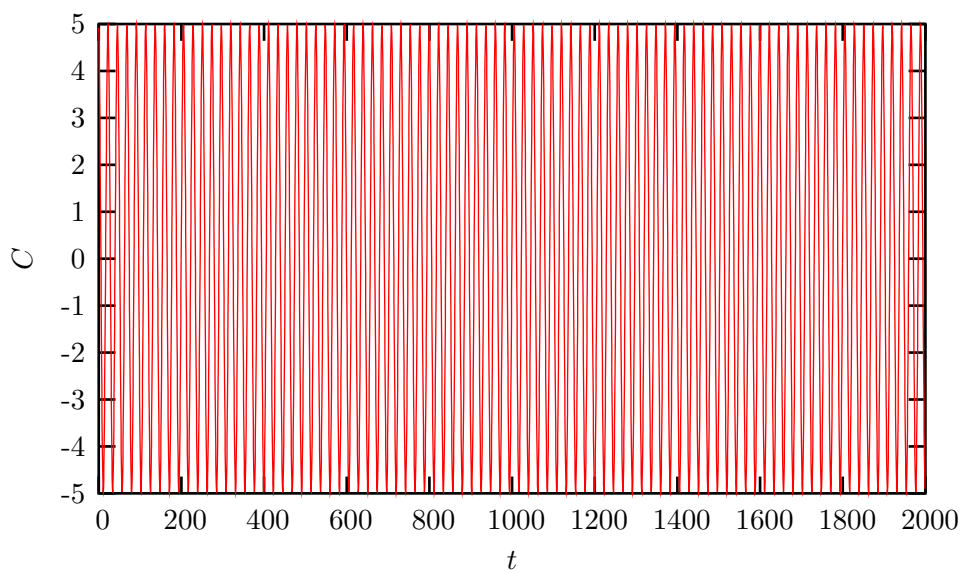


Figura 10: Autocorrelación para $e = 0$

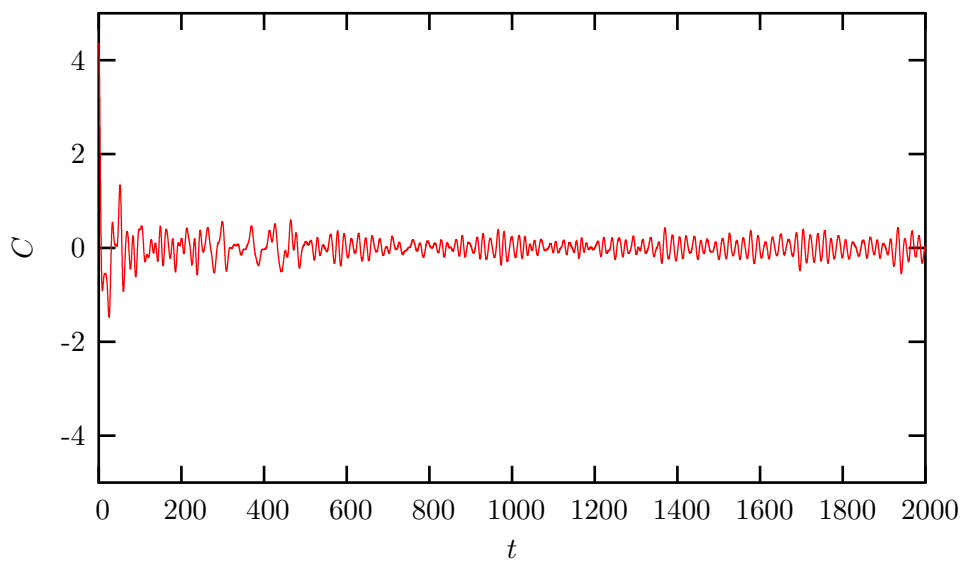


Figura 11: Autocorrelación para $e = 0,07$

6. Conclusiones

Después de este trabajo lo que se puede concluir es que en el problema de los tres cuerpos se tienen muchos casos en los cuales hay caos, pero en el que es más sencillo visualizarlo y parametrizarlo es en el caso del problema de Sitnikov.

En el problema de Sitnikov podemos concluir que el único parámetro importante para determinar si hay o no caos, es la excentricidad del movimiento de las primarias, que determinarán el tipo de movimiento al que se someta el tercer cuerpo.

7.

Referencias

- [1] Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamic of Particles and Rigid Bodies with an introduction to the problem of three bodies*, Cambridge University Press, 1965.
- [2] Fernández D y Rañada A F, *Chaos in the three-body problem: the Sitnikov case*, *Eur. J. Phys.* vol 17, p. 295, 1996
- [3] Benettin G, Galgani L y Strelcyn J M , *Phys. Rev. A* vol 14, p. 2338, 1976.
- [4] *Numerical Recipes in C*, Second Edition, Cambridge University Press, 1992.